第10講　面積の公式

10　次の各問いに答えよ．

(1)　曲線 $C：y=|x(x-1)|$ と直線 $l：y=kx$ （k は定数）に関して，C と l が $x>0$ の範囲で異なる 2 つの交点をもつとする．このとき，C と l によって囲まれる図形全体の面積を最小にする k の値とその面積の最小値を求めよ．

(2)　曲線 $C：y=x^4+px^2+qx+r$ と直線 $l：y=ax+b$ が異なる 2 点で接する条件を求めよ．また，このとき，C と l で囲まれた部分の面積 S を p で表せ．ただし，p，q，r，a，b は実数の定数とする．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第10講　面積の公式

10　座標平面上で原点を通る直線と $y=x|x+2|$ のグラフが相異なる3点で交わっている．このグラフと直線によって囲まれる図形で，この直線より下側にあるものの面積を S_1，上側にあるものの面積を S_2 とする．$S_1:S_2=9:8$ となるとき，この直線の傾きを求めよ．

【選択肢】

㋐ $\frac{8}{9}$　　㋑ $\frac{1}{2}$　　㋒ $\frac{1}{3}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第10講　面積の公式

10　次の各問いに答えよ．

(1)　曲線 C：$y=|x(x-1)|$ と直線 l：$y=kx$（k は定数）に関して，C と l が $x>0$ の範囲で異なる２つの交点をもつとする．このとき，C と l によって囲まれる図形全体の面積を最小にする k の値とその面積の最小値を求めよ．

(2)　曲線 C：$y=x^4+px^2+qx+r$ と直線 l：$y=ax+b$ が異なる２点で接する条件を求めよ．また，このとき，C と l で囲まれた部分の面積 S を p で表せ．ただし，p，q，r，a，b は実数の定数とする．

【答】 (1) $k=3-2\sqrt{2}$，最小値 $\dfrac{23-16\sqrt{2}}{3}$

(2) 条件：$p<0$，$q=a$，$p^2=4(r-b)$，面積：$S=\dfrac{(-2p)^{\frac{5}{2}}}{30}$

【解答】

(1)　与式より

$$y=x|x-1|=\begin{cases} x(x-1) & (x\leqq 0,\ 1\leqq x) \\ -x(x-1) & (0<x<1) \end{cases}$$

である．これと $y=kx$ を連立して

$x(x-1)=kx$ より　$x(x-1-k)=0$　　$\therefore$　$x=0,\ 1+k$

$-x(x-1)=kx$ より　$x(-x+1-k)=0$　　$\therefore$　$x=0,\ 1-k$

よって C と l が $x>0$ で２つの交点をもつ条件は

$$0<1-k\leqq 1 \text{ かつ } 1+k\geqq 1 \text{ かつ } 1-k\neq 1+k$$

$$\therefore\quad 0<k<1$$

C と l により囲まれる図形全体の面積を S とし，$1-k=\alpha$，$1+k=\beta$ とおくと

$$S=\int_0^{\alpha}\{-x(x-1)-kx\}dx+\int_{\alpha}^{1}\{kx+x(x-1)\}dx+\int_1^{\beta}\{kx-x(x-1)\}dx$$

$$=\int_0^{\alpha}\{-x^2+(1-k)x\}dx+\int_{\alpha}^{1}\{x^2-(1-k)x\}dx+\int_1^{\beta}\{-x^2+(1+k)x\}dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{\alpha}{2}x^2\right]_0^{\alpha}+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{\alpha}{2}x^2\right]_{\alpha}^{1}+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{\beta}{2}x^2\right]_1^{\beta}$$

$$=\frac{1}{6}\alpha^3+\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\alpha\right)+\frac{1}{6}\alpha^3\right\}+\left\{\frac{1}{6}\beta^3-\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\beta\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\alpha^3+\frac{1}{6}\beta^3-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\frac{2}{3}$$

$$=\frac{1}{6}(-k^3+9k^2-3k+1)$$

これを $f(k)$ とおくと，$f'(k)=-\dfrac{1}{2}(k^2-6k+1)$ より $f(k)$ の増減は

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

k	0	$\cdots$	$3-2\sqrt{2}$	$\cdots$	1
$f'(k)$		$-$	0	$+$	
$f'(k)$		↘		↗	

となるので，求める k の値は　$\mathbf{3-2\sqrt{2}}$

　また，$f(k)=f'(k)\left(\dfrac{1}{3}k-1\right)+\dfrac{8}{3}k-\dfrac{1}{3}$ より

面積の最小値は　$f(3-2\sqrt{2})=\dfrac{8}{3}(3-2\sqrt{2})-\dfrac{1}{3}=\mathbf{\dfrac{23-16\sqrt{2}}{3}}$

(2)　α，β を $\alpha<\beta$ を満たす実数とする．

　$x^4+px^2+qx+r=ax+b$　すなわち $x^4+px^2+(q-a)x+(r-b)=0$ が α，β をそれぞれ重解にもつとすると，解と係数の関係より

$$\begin{cases} 2(\alpha+\beta)=0 & \cdots\cdots① \\ \alpha^2+\beta^2+4\alpha\beta=p & \cdots\cdots② \\ 2\alpha\beta(\alpha+\beta)=-(q-a) & \cdots\cdots③ \\ (\alpha\beta)^2=r-b & \cdots\cdots④ \end{cases}$$

が成り立つ．①より $\alpha+\beta=0$　これと②より得られる $(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta=p$ より $\alpha\beta=\dfrac{p}{2}$

このとき α と β は $X^2+\dfrac{p}{2}=0$ の異なる2つの実数解となるので，$\dfrac{p}{2}<0$　すなわち

$\boldsymbol{p<0}$ を得る．また③，④より $\boldsymbol{q=a}$，$\boldsymbol{p^2=4(r-b)}$ となる．この条件のもとで

$$\begin{aligned} S&=\int_{\alpha}^{\beta}\{(x^4+px^2+qx+r)-(ax+b)\}dx \\ &=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2(x-\beta)^2dx \\ &=\int_{\alpha}^{\beta}\{(x-\alpha)^4-2(\beta-\alpha)(x-\alpha)^3+(\beta-\alpha)^2(x-\alpha)^2\}dx \\ &=\left[\frac{1}{5}(x-\alpha)^5-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)(x-\alpha)^4+\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^2(x-\alpha)^3\right]_{\alpha}^{\beta} \\ &=\frac{1}{30}(\beta-\alpha)^5 \\ &=\frac{1}{30}\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}^{\frac{5}{2}} \\ &=\mathbf{\frac{(-2p)^{\frac{5}{2}}}{30}} \end{aligned}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 10 講　面積の公式

10　座標平面上で原点を通る直線と $y=x|x+2|$ のグラフが相異なる 3 点で交わっている．このグラフと直線によって囲まれる図形で，この直線より下側にあるものの面積を S_1，上側にあるものの面積を S_2 とする．$S_1:S_2=9:8$ となるとき，この直線の傾きを求めよ．

【選択肢】

㋐ $\dfrac{8}{9}$　㋑ $\dfrac{1}{2}$　㋒ $\dfrac{1}{3}$

【答】 ㋑

【解答】

直線の傾きを m とする．$x|x+2|=mx$ とすると

$$\begin{cases} x \geqq -2 \quad \text{かつ} \quad x(x+2)=mx \\ x<-2 \quad \text{かつ} \quad -x(x+2)=mx \end{cases}$$

すなわち
$$\begin{cases} x \geqq -2 \quad \text{かつ} \quad x(x+2-m)=0 \\ x<-2 \quad \text{かつ} \quad x(x+2+m)=0 \end{cases}$$

すなわち
$$\begin{cases} x \geqq -2 \quad \text{かつ} \quad x=0,\ m-2 \\ x<-2 \quad \text{かつ} \quad x=-m-2 \end{cases}$$

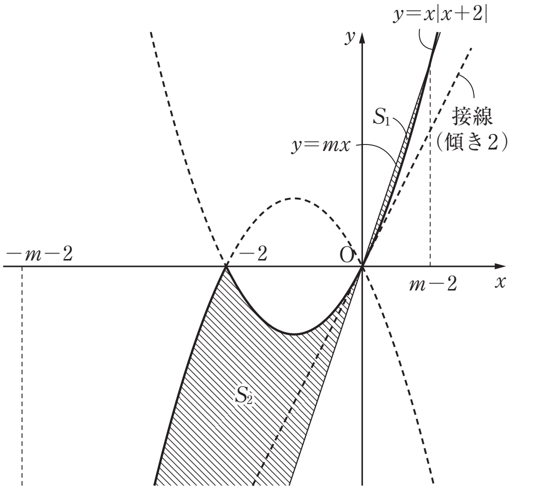
よって，グラフと直線が異なる 3 点で交わる条件は

$$-m-2<-2 \quad \text{かつ} \quad m-2 \geqq -2 \quad \text{かつ} \quad m-2 \neq 0$$

$$\therefore \quad 0<m<2,\ m>2$$

(Ⅰ) $m>2$ のとき，$-m-2<-2<0<m-2$ より

$$S_1=\int_0^{m-2}\{mx-x(x+2)\}dx$$
$$=\frac{1}{6}(m-2)^3$$
$$S_2=\int_{-m-2}^{0}\{x|x+2|-mx\}dx$$
$$=\int_{-2}^{0}\{x^2+(2-m)x\}dx+\int_{-m-2}^{-2}\{-x^2-(2+m)x\}dx$$
$$=\int_{-m-2}^{0}\{-x^2-(2+m)x\}dx-2\int_{-2}^{0}\{-x(x+2)\}dx$$
$$=\frac{1}{6}\{0-(-m-2)\}^3-2\times\frac{1}{6}\{0-(-2)\}^3$$
$$=\frac{1}{6}(m+2)^3-\frac{8}{3}$$



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

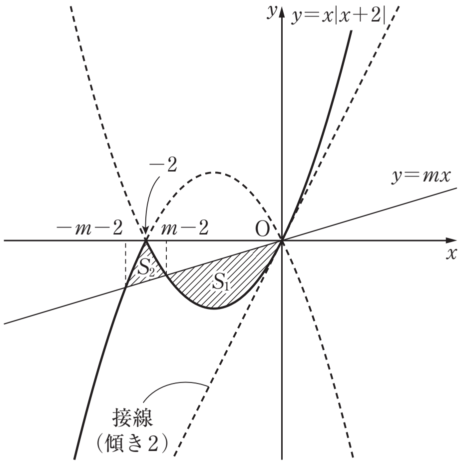
このとき

$$S_2=\frac{1}{6}\{(m-2)+4\}^3-\frac{8}{3}$$

$$>\frac{1}{6}(m-2)^3+\frac{4^3}{6}-\frac{8}{3}>S_1$$

であるから，$S_1:S_2=9:8$ にはならない．

(Ⅱ)　$0<m<2$ のとき，$-m-2<-2<m-2<0$ より



$$S_1=\int_{m-2}^{0}\{mx-x(x+2)\}dx$$

$$=\frac{1}{6}(-m+2)^3$$

$$S_2=\int_{-m-2}^{-2}\{-x^2-(2+m)x\}dx$$

$$+\int_{-2}^{m-2}\{x^2+(2-m)x\}dx$$

$$=\int_{-m-2}^{0}\{-x^2-(2+m)x\}dx$$

$$-2\int_{-2}^{0}\{-x(x+2)\}dx+S_1$$

$$=\frac{1}{6}(m+2)^3-2\times\frac{1}{6}\times 2^3+\frac{1}{6}(-m+2)^3$$

$$=2m^2$$

このとき $S_1:S_2=9:8$ より

$$8S_1=9S_2$$

$$8\cdot\frac{1}{6}(-m+2)^3=9\cdot 2m^2$$

$$2m^3+15m^2+24m-16=0$$

$$(2m-1)(m+4)^2=0$$

$$\therefore\quad m=\frac{1}{2}$$

以上により，求める直線の傾きは $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。